לוגיקה (1) – פתרונות תרגיל 7

1.

א. ברור שאם גרף G הוא צביע (כלומר, יש לו צביעה חוקית) אז כל תת גרף של G הוא צביע (קחו צביעה חוקית של G, והסתכלו על הצביעה המושרית על כל תת גרף).

ב. בהינתן גרף $G=(V,E)$ נגדיר שפה: $L=\{P_{u,v}:u,v\in V\}\cup\{P_{u,i}:n\in V,1\le i\le n\}$. נגדיר את קבוצות הפסוקים הבאות:

(i) $\Gamma_1=\{\overset{n}{\underset{i=1}{Xor}}(p_{u,i}):u\in V,1\le i\le n\}$, כאשר הסימון $Xor^n_{i=1}(P_i)$ הוא קיצור לפסוק "בדיוק אחד מבין ה-P_i-ים מקבל ערך T.

(ii) $\Gamma_2=\{p_{u,i}\to\neg p_{v,i}:(u,v)\in E,1\le i\le n\}$.

ראיתם בתרגיל 6, שאלה 4, של-$\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$ יש מודל אמם G צביע.

ג. ממשפט הקומפקטיות אנחנו יודעים של-Γ יש מודל אמם לכל תת קבוצה סופית של יש מודל. תהי, אם כן, $\Gamma_0\subset\Gamma$ סופית. עלינו להראות שאם כל תת גרף של G הוא צביע אז ל-Γ_0 יש מודל. נשים לב שמותר לנו להוסיף ל-Γ_0 פסוקים מתוך Γ, כיוון שע"י כך אנחנו רק מקשים על עצמנו. לכן נסמן ב-$V_0=\{v\in V:\text{לאיזה } i\ P_{u,i}\in\Gamma_0\}$ (כלומר, V_0 היא קבוצת כל הקדקודים הנזכרים ב-Γ_0). נגדיר $E_0=\{(u,v)\in E:u,v\in V_0\}$ (כלומר, E_0 הוא אוסף כל הצלעות ב-G בין קדקודים מתוך V_0). ונשים לב ש-$G_0=(V_0,E_0)$ הוא תת גרף של G.
כעת נגדיר:

- $\Gamma_1^0=\{\overset{n}{\underset{i=1}{Xor}}(p_{u,i}):u\in V_0,1\le i\le n\}$
- $\Gamma_2^0=\{p_{u,i}\to\neg p_{v,i}:(u,v)\in E_0,1\le i\le n\}$.

אזי ברור ש-$\Gamma_0'=\Gamma_1^0\cup\Gamma_2^0\supseteq\Gamma$ ומהגדרת V_0 ברור ש-$\Gamma_0\subseteq\Gamma_0'$, לכן יספיק להראות של-$\Gamma_0'$ יש מודל, אבל לפי תרגיל 6, שאלה 4, ל-Γ_0' יש מודל אמם ל-$G_0=(V_0,E_0)$ יש צביעה חוקית, וזה בדיוק הנתון.

2.

א. טריביאלי.

ב. מההגדרה נובע ש-$A\in U_{B,\varepsilon}$ אמם $d(A.B)<\varepsilon$ אמם $\sup\{1/n:A(P_n)\ne B(P_n)\}<\varepsilon$. לכן הפסוק הדרוש הוא אמם לכל n כך ש-$1/n\ge\varepsilon$ מתקיים $A(P_n)=B(P_n)$
$\varphi_U=\bigwedge_{1/n\ge\varepsilon}P_n^{(B(P_n))}$, כאשר $P_n^{(T)}=P_n$ ו-$P_n^{(F)}=\neg P_n$ אחרת.

ג. אם $\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i$ כיסוי של S אזי $\phi=S\setminus\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i=\bigcap_{i=1}^{\infty}S\setminus U_i=\bigcap_{i=1}^{\infty}Models(\varphi_{U_i})$, כלומר, הקבוצה $\Gamma=\{\varphi_{U_i}\}_{i=1}^{\infty}$ אינה עקבית, כלומר יש n טבעי כך שהקבוצה $\Gamma_0=\{\varphi_{U_i}\}_{i=1}^{n}$ אינה עקבית, כלומר $\phi=S\setminus\bigcup_{i=1}^{n}U_i=\bigcap_{i=1}^{n}S\setminus U_i=\bigcap_{i=1}^{n}Models(\varphi_{U_i})$, כנדרש.

ד. הטענה נובעת ישירו ת מסעיף ב': מהנתון $S\setminus D=\bigcup_i U_i$ כאשר U_i סביבות. לכן
$D=\bigcap_{i\in I}S\setminus U_i=\bigcap_{i\in I}Models(\varphi_i)=Models\{\varphi_i\}_{i\in I}$, כנדרש.

3.

א. נניח ש- $A \models \varphi \vee \psi$ אז לפי הגדרת האמת או ש- $A \models \varphi$, ואז מכיוון ש- $\varphi \models \chi$ נובע ש- $A \models \chi$, או ש- $A \models \psi$ ואז מהחלק השני בנתון ($\psi \models \chi$) נובע ש- $A \models \chi$. בסיכומו של דבר: אם $A \models \varphi \vee \psi$ אז $A \models \chi$, ולכן $\varphi \vee \psi \models \chi$, והטענה נכונה.

ב. הטענה אינה נכונה: קחו $\varphi = p$, $\psi = q$ ו- $\chi = \neg q$.

ג. נניח ש- $A \models \varphi$ אזי מהנתון $A \models \chi \wedge \psi$. לפי הגדרת האמת זה שקול לכך ש- $A \models \chi$ ו- $A \models \psi$. בסיכום, $A \models \varphi$ אז $A \models \psi$, ולכן $\varphi \models \psi$, ובנוסף $A \models \chi$ ולכן גם $\varphi \models \chi$. לכן הטענה נכונה.

ד. יתכן רק אם φ סתירה.

ה. נכון, כי $\varphi \models \chi$ אסם $Models(\neg\varphi) \subseteq Models(\neg X) \Leftrightarrow Models(\chi) \supseteq Models(\varphi)$, כנדרש.

ו. התנאי יתכן אסם χ היא טאוטולוגיה, ולכן גם $\psi \models \chi$, ולכן הטענה נכונה.

4.

א. באינדוקציה על אורך המחרוזת: לקבועים או למשתנים אישיים אין רישא ממש שאינה ריקה, ולכן הטענה נכונה. נניח את הטענה לכל מחרוזת מאורך קטן מ-n ונוכיח עבור מחרוזת α מאורך n: נשים לב שבאינדוקציה טריביאלית מראים שאם האורך של ש"ע גדול מ-1, אזי התו הראשון במחרוזת הוא סימן פעולה בשפה. לכן המחרוזת הנתונה לנו מתחילה בסימן פעולה m-מקומי H. לפי ההגדרה H אינה ש"ע (כי האורך של כל ש"ע שאינו קבוע או משתנה אישי גדול ממש מ-1). לכן בהינתן רישא ממש χ, לפי ההגדרה חייב להתקיים ש- $\beta, \chi = Ht_1,\ldots,t_k$ כאשר β היא רישא ממש של t_{k+1}. אבל לפי ההגדרה χ היא ש"ע אסם יש שמות עצם $t'_1,\ldots,t'_m$ כך ש- $\chi = Ht_1,\ldots,t_k, \beta = Ht'_1,\ldots,t'_m$. לפי הנחת האינדוקציה לא יתכן ש- t'_1 הוא רישא ממש של t_1. לכן יש $1 \le i \le k$ מזערי כך ש- t'_i מכיל ממש (כמחרוזת) את t_i (שאם לא כן $t_i = t'_i$ לכל $1 \le i \le k$, ומכיוון ש- $k < m$ נגיע לסתירה). אבל זה כמובן לא יתכן כי האורך של t'_i קטן ממש מ-n ו- t_i רישא ממש שלו שהיא ש"ע – בסתירה להנחת האינדוקציה.

ב. ההוכחה זהה מילה במילה למשפט הקריאה היחידה לפסוקים בתחשיב הפסוקים.